УДК 517.589, 517.926.4

ІНТЕГРАЛИ ВІД ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ ЗРОСТАЮЧИМИ ФАКТОРІАЛЬНИМИ СТЕПЕНЯМИ

© Т. П. Гой

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76018, Україна
e-mail: *tarasgoy@yahoo.com*

Integrals from functions generated by increasing factorial powers.

Goy T. P.

Abstract. Mathematical models of various natural and industrial processes often lead to problems, exact solutions of which it is impossible to obtain by means of well-known classical methods. This is the reason for further development of function theory and numerical analysis. Enlargement "library" of non-elementary functions leads to the enlargement of tasks that can be solved in closed form. That's why the introducing of new non-elementary functions and studying their properties are actual tasks. Further studying of the new non-elementary functions is prospective and very useful for different branches of science.

The classical transcendental functions $\cos x$, $\sin x$ is given by the corresponding power series with factorials, which can be written as the falling factorial power $n^{\underline{n}}$ (i.e. usual funtorials). Replacing the falling factorial powers by the corresponding rising factorial powers $n^{\overline{n}}$, we get the new non-elementary real functions $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$.

In general, duality of rising and falling factorial powers is a common feature in the combinatorial analysis. In other words, if a problem leads to some combinatorial identity constructed with the help of falling factorial powers, then there is often a dual combinatorial problem, which leads to a dual combinatorial identity involving rising factorial powers.

In this paper we consider new integral functions $\widetilde{S}(x) = \int_0^x \mathrm{Sin}(t)\,dt$, $\widetilde{C}(x) = \int_0^x \mathrm{Cos}(t)\,dt$. We sketch graphs of these functions and find some of their basic properties. In particular, we established the relationship of these functions with the generalized hypergeometric function ${}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z)$. We also showed that functions $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$ are solutions of linear ordinary differential equations of four order with variables coefficients.

Вступ

Постановка проблеми. Математичні моделі багатьох природних і технічних процесів приводять до задач, точні розв'язки яких отримати класичними методами неможливо. Розширення "бібліотеки" неелементарних функцій приводить до значного розширення кола задач, які не можуть бути розв'язані у замкненому вигляді. Тому запровадження нових неелементарних функцій та вивчення їх властивостей є актуальною задачею, яка зумовлює подальший розвиток наближених методів і теорії функцій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У [1], [2] досліджені нові неелементарні функції $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, утворені заміною у степеневих рядах тригонометричних функцій $\sin x$, $\cos x$ спадних факторіальних степенів (звичайних факторіалів) відповідними зростаючими факторіальними степенями. Виведені також формули, що пов'язують ці функції. Показано, що функції $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$ є розв'язками звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

У [3] введені інтегральні функції, утворені заміною у класичних інтегралах Френеля (синус-інтегралі та косинус-інтегралі Френеля) $\int\limits_0^x \sin t^2 dt$, $\int\limits_0^x \cos t^2 dt$ тригонометричних функцій на функції $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$ відповідно. Встановлені формули, що пов'язують введені функції з класичними інтегралами Френеля.

Мета дослідження. У цій статті досліджені властивості інтегралів зі змінною верхньою межею від функцій $\mathrm{Sin}\,(x)$, $\mathrm{Cos}\,(x)$, встановлений їхній зв'язок з узагальненими гіпергеометричими функціями.

Також отримані лінійні звичайні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, розв'язками яких є функції $\int\limits_0^x \mathrm{Sin}\, t^2 dt$, $\int\limits_0^x \mathrm{Cos}\, t^2 dt$.

1. Основні означення й поняття

Для довільних $x \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$ *факторіальним степенем* m з кроком $k \in \mathbb{R}$ називають вираз

$$x^{m\{k\}} = \begin{cases} x(x+k)\cdot(x+2k)\cdot\ldots\cdot(x+(m-1)k), & \text{якщо } m \neq 0, \\ 0, \quad \text{якщо } m = 0. \end{cases}$$

Факторіальний степінь $x^{m\{k\}}$ називають *зростаючим*, якщо $k > 0$, і *спадним*, якщо $k < 0$. Якщо $k = 0$, то маємо звичайний степінь, бо $x^{m\{0\}} = x^m$.

Найчастіше використовують зростаючі та спадні факторіальні степені з кроками 1, (− 1) відповідно, які позначатимемо через

$$x^{\overline{m}} = x^{m\{1\}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1),$$
$$x^{\underline{m}} = x^{m\{-1\}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1).$$

Очевидно, що $n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

Відомо (див., наприклад, [4]–[6]), що зростаючим і спадним факторіальним степеням у комбінаторному аналізі зазвичай притаманна двоїстість, тобто якщо задача приводить до комбінаторної тотожності, побудованої при допомозі спадних факторіальних степенів, то існує змістовна комбінаторна задача, яка приводить до двоїстої тотожності із зростаючими факторіальними степенями.

За аналогією з відомими степеневими розвиненнями

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{\underline{2n+1}}}\, x^{2n+1},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\underline{2n}}}\, x^{2n},$$

у [1], [2] досліджені нові неелементарні функції дійсної змінної $\mathrm{Sin}(x)$ і $\mathrm{Cos}(x)$, побудовані при допомозі зростаючих факторіальних степенів:

$$\mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}\, x^{2n+1}, \qquad \mathrm{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\overline{2n}}}\, x^{2n}.$$

Зокрема, у [1] доведено, що

$$\begin{gathered} \mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(4n-3)!}\, x^{2n-1} = \\ = 2\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}\cdot C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + \sin\frac{x}{4}\cdot S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right), \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{Cos}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(2n-1)!}{(4n-1)!}\, x^{2n} = \\ = 1 + 2\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}\cdot S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - \sin\frac{x}{4}\cdot C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right), \end{gathered} \tag{2}$$

де $S(p)$ і $C(p)$ — інтеграли (синус-інтеграл і косинус-інтеграл) Френеля, які визначаються формулами [7]

$$S(p) = \int_0^p \sin\frac{\pi t^2}{2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!}\, p^{4n+3},$$

$$C(p) = \int_0^p \cos\frac{\pi t^2}{2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!}\, p^{4n+1}.$$

Графіки функцій $y = \mathrm{Sin}\,(x)$ і $y = \mathrm{Cos}\,(x)$ зображені на рисунках 1, 2 відповідно.

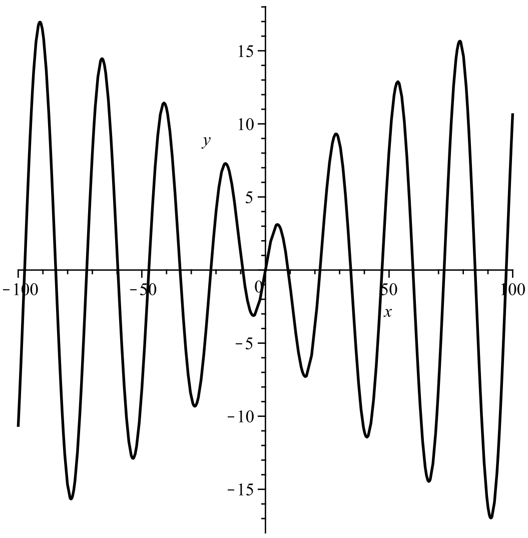

Рис. 1. Графік функції $y = \mathrm{Sin}(x)$

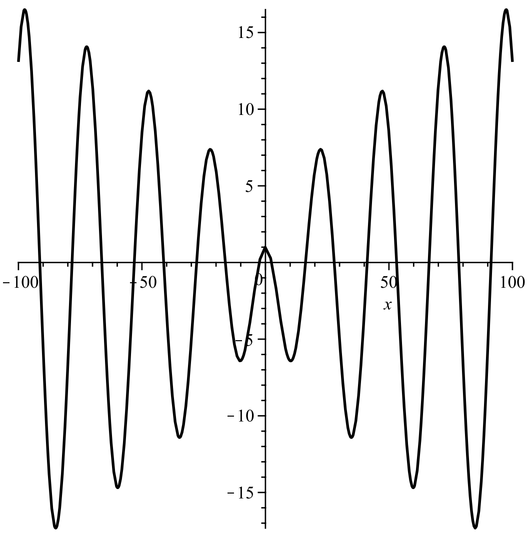

Рис. 2. Графік функції $y = \mathrm{Cos}(x)$

2. Зв'язок функцій $\mathbf{Sin}\,(x)$, $\mathbf{Cos}(x)$ з узагальненими гіпергеометричними функціями

Позначимо через ${}_sF_q\,(a_1, a_2, \ldots, a_s;\, b_1, b_2, \ldots, b_q; z)$ узагальнену гіпергеометричну функцію, тобто функцію, яка визначається за допомогою узагальненого гіпергеометричного ряду [8]

$$ {}_sF_q\,(a_1, a_2, \ldots, a_s;\, b_1, b_2, \ldots, b_q;\, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^{\overline{n}}\, a_2^{\overline{n}} \ldots a_s^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}\, b_2^{\overline{n}} \ldots b_q^{\overline{n}}} \cdot \frac{z^n}{n!}, $$

де $a_1^{\overline{n}}$, $a_2^{\overline{n}}, \ldots,$ $a_s^{\overline{n}}$, $b_1^{\overline{n}}$, $b_2^{\overline{n}}, \ldots,$ $b_q^{\overline{n}}$ — зростаючі факторіальні степені.

Теорема 1. *Для всіх* $x \in (-\infty; +\infty)$ *справджуються тотожності*

$$ \mathrm{Sin}(x) = x \cdot {}_1F_2\left(1;\, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{x^2}{64}\right), \tag{3} $$

$$ \mathrm{Cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{6} \cdot {}_1F_2\left(1;\, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; -\frac{x^2}{64}\right). \tag{4} $$

Доведення. З (1), враховуючи, що $n! = 1^{\overline{n}}$, а $(4n+1)! = 2^{2n}(2n)!(4n+1)!!$, для функції $\mathrm{Sin}(x)$ одержуємо:

$$ \mathrm{Sin}(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(4n+1)!}\, x^{2n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (4n+1)!!}\, x^{2n} = $$

$$ = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n \big(3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (4n-1)\big) \cdot \big(5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n+1)\big)}\, x^{2n} = $$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{64^n\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)}\,x^{2n}=$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{\overline{n}}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}}n!}\cdot\left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = x\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{3}{4},\frac{5}{4};-\frac{x^2}{64}\right).$$

Для функції $\mathrm{Cos}(x)$ з (2), враховуючи, що $(4n+3)! = 2^{2n+1}(2n+1)!(4n+3)!!$, маємо:

$$\mathrm{Cos}\,(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(4n+3)!}\,x^{2n+2} = 1-\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(4n+3)!!}\,x^{2n}=$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n\cdot\big(5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)\big)\cdot\big(7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+3)\big)}\,x^{2n}=$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{64^n\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)\cdot\left(\frac{7}{4}\cdot\frac{13}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+3}{4}\right)}\,x^{2n}=$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{\overline{n}}}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{7}{4}\right)^{\overline{n}}n!}\cdot\left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = 1-\frac{x^2}{6}\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{5}{4},\frac{7}{4};-\frac{x^2}{64}\right).$$

Теорему доведено. □

3. Інтеграли від функцій $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$

Позначимо через $\widetilde{S}(x)$ і $\widetilde{C}(x)$ інтеграли зі змінною верхньою межею від функцій $\mathrm{Sin}(x)$ і $\mathrm{Cos}(x)$, тобто

$$\widetilde{S}(x) = \int_0^x \mathrm{Sin}\,t\,dt,\qquad \widetilde{C}(x) = \int_0^x \mathrm{Cos}\,t\,dt. \tag{5}$$

Враховуючи формули (1), (2), з (5) одержуємо такі зображення функцій $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$ у вигляді степеневих рядів, абсолютно збіжних на всій числовій осі:

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2n(4n-3)!}\,x^{2n}, \tag{6}$$

$$\widetilde{C}(x) = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{(2n+1)(4n-1)!}\,x^{2n+1}. \tag{7}$$

З (6), (7), зокрема, випливає, що функція $\widetilde{S}(x)$ є парною, а функція $\widetilde{C}(x)$ — непарною.

Графіки функцій $y=\widetilde{S}(x)$ і $y=\widetilde{C}(x)$ наведені на рисунках 3, 4 (на рис. 4 пунктиром проведено пряму $y=-x$).

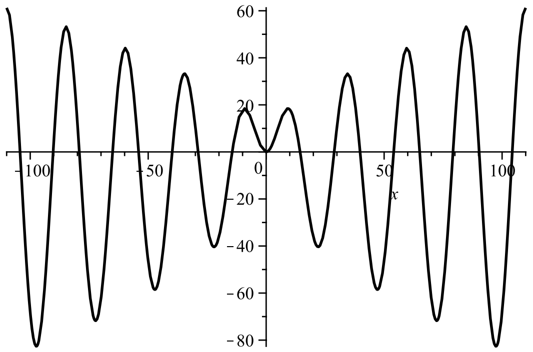

Рис. 3. Графік функції $y = \widetilde{S}(x)$

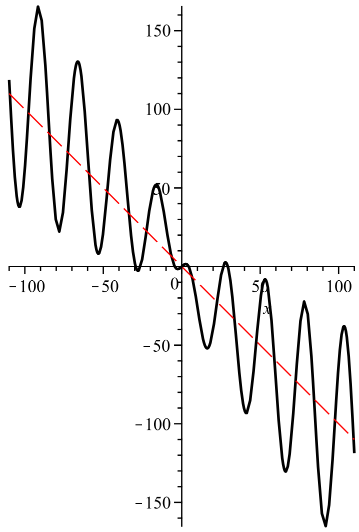

Рис. 4. Графік функції $y = \widetilde{C}(x)$

Теорема 2. *Для всіх* $x \in (-\infty; +\infty)$

$$\widetilde{S}(x) = \frac{x^2}{2} \cdot {}_2F_3\left(1, 1;\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2; -\frac{x^2}{64}\right), \tag{8}$$

$$\widetilde{C}(x) = x - \frac{x^3}{18} \cdot {}_2F_3\left(1, \frac{3}{2};\ \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}; -\frac{x^2}{64}\right). \tag{9}$$

Доведення. Аналогічно до доведення теореми 1, використовуючи формули (6), (7), одержуємо:

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!}{(2n+2)\,(4n+1)!}\, x^{2n+2} = \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!\,(4n+1)!!\,4^n}\, x^{2n} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)(n+1)!} \left(-\frac{x^2}{64}\right)^n =$$

$$= \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{\overline{n}}\,1^{\overline{n}}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}} 2^{\overline{n}}\, n!} \cdot \left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = \frac{x^2}{2} \cdot {}_2F_3\left(1, 1;\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2; -\frac{x^2}{64}\right);$$

$$\widetilde{C}(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(2n+3)(4n+3)!}\, x^{2n+3} = x - \frac{x^3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)(4n+3)!!\,4^n}\, x^{2n} =$$

$$= x - \frac{x^3}{18} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+1}{4}}{\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)\cdot\left(\frac{7}{4}\cdot\frac{11}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+3}{2}\right)} \left(-\frac{x^2}{64}\right)^n =$$

$$= x - \frac{x^3}{18} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{\overline{n}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\overline{n}}}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{7}{4}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{5}{2}\right)^{\overline{n}} n!} \cdot \left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = x - \frac{x^3}{18} \cdot {}_2F_3\left(1, \frac{3}{2};\ \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}; -\frac{x^2}{64}\right).$$

Теорему доведено. □

Диференціальні рівняння функцій $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$

Покажемо, що функції $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$ є розв'язками задач Коші для лінійних неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку з неперервними коефіцієнтами.

Теорема 3. *Функції* $\widetilde{S}(x), \widetilde{C}(x)$ *є розв'язками відповідно таких задач Коші:*

$$\left.\begin{aligned} 16x^3y^{(4)} + (x^3+12x)y'' + (x^2-12)y' = 0, \\ y(0)=0,\ \ y'(0)=0,\ \ y''(0)=1,\ \ y'''(0)=0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} 16x^3y^{(4)} - 16x^2y''' + (x^3+28x)y'' + 24y' = -24, \\ y(0)=0,\ \ y'(0)=1,\ \ y''(0)=0,\ \ y'''(0)=-1/3. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Доведення. Те, що функції $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$ задовольняють відповідні початкові умови з (10), (11), випливає з формул (6), (7).

Доведемо тепер, що ці функції є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь. Узагальнена гіпергеометрична функція ${}_2F_3\,(a_1,a_2;\ b_1,b_2,b_3;\ z)$, через яку, згідно з (8), (9), виражаються функції $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$, є розв'язком лінійного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку [8]

$$\big(\delta(\delta+b_1-1)(\delta+b_2-1)(\delta+b_3-1) - z(\delta+a_1)(\delta+a_2)\big)w(z) = 0,$$

де через δ позначено диференціальний оператор $\delta = z\frac{d}{dz}$.

Отже, функція

$$w(z) = {}_2F_3\left(1,1;\ \frac{3}{4},\frac{5}{4},2;\ z\right) \tag{12}$$

з (8) є розв'язком рівняння

$$\left(\delta\left(\delta-\frac{1}{4}\right)\left(\delta+\frac{1}{4}\right)(\delta+1) - z(\delta+1)(\delta+1)\right)w(z) = 0. \tag{13}$$

Оскільки

$$\delta = z\frac{d}{dz}, \qquad \delta^2 = z\frac{d}{dz} + z^2\frac{d^2}{dz^2}, \qquad \delta^3 = z\frac{d}{dz} + 3z^2\frac{d^2}{dz^2} + z^3\frac{d^3}{dz^3},$$

$$\delta^4 = z\frac{d}{dz} + 7z^2\frac{d^2}{dz^2} + 6z^3\frac{d^3}{dz^3} + z^4\frac{d^4}{dz^4},$$

то з (13), виконавши нескладні перетворення, одержуємо, що функція $w(z)$ з (12) є розв'язком диференціального рівняння

$$z^3w^{(4)} + 7z^2w''' + \left(\frac{159}{16}\,z - z^2\right)w'' + \left(\frac{15}{8} - 3z\right)w' - w = 0. \tag{14}$$

Виконаємо тепер у (14) заміну незалежної змінної за формулою $z = -x^2/64$. Тоді

$$w'_z = -32x^{-1}w'_x, \qquad w''_z = 32^2x^{-3}(xw''_x - w'_x),$$

$$w'''_z = -32^3x^{-5}\big(x^2w'''_x - 3xw''_x - 3w'_x\big),$$

$$w^{(4)}_z = 32^4x^{-7}\big(x^3w^{(4)}_x - 6x^2w'''_x + 15w''_x - 15w'\big)$$

і, підставляючи у (14), переконуємося, що функція

$$w(x) = {}_2F_3\left(1, 1;\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2; -\frac{x^2}{64}\right)$$

є розв'язком диференціального рівняння

$$4x^3w^{(4)} + 32x^2w''' + \left(\frac{x^3}{4} + 51x\right)w' + \left(\frac{5x^2}{4} + 9\right)w' + xw = 0.$$

Нарешті, підставляючи в останнє рівняння $y = x^2w(x)/2$, одержуємо, що функція $y = \widetilde{S}(x)$ є розв'язком рівняння з (10).

Аналогічно доводиться, що функція $v(z) = {}_2F_3\big(1, \frac{3}{2};\ \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2};\ z\big)$ з (9) — розв'язок рівняння

$$z^3v^{(4)} + \frac{17}{2}z^2v''' + \left(\frac{259}{16}z - z^2\right)v'' + \left(\frac{175}{32} - \frac{7}{2}z\right)v' - \frac{3}{2}v = 0,$$

а функція

$$v(x) = {}_2F_3\left(1, \frac{3}{2};\ \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}; -\frac{x^2}{64}\right)$$

є розв'язком лінійного однорідного рівняння

$$16x^3v^{(4)} + 176\,x^2v''' + (x^3 + 460)v'' + (6x^2 + 240)v' + 6xv = 0.$$

Підставляючи в останнє рівняння $y = x - x^3v(x)/3$, одержуємо, що функція $y = \widetilde{C}(x)$ є розв'язком рівняння з (11).

Теорему доведено. $\square$

Висновки

У статті запропоновані дві нові неелементарні функції дійсної змінної, які є інтегралами від неелементарних функцій, побудованих при допомозі зростаючих факторіальних степенів. Досліджені деякі їх властивості, показаний зв'язок введених функцій з узагальненими гіпергеометричними функціями. Встановлено, що нові функції є розв'язками задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку з неперервними коефіцієнтами.

Список літератури

1. Гой Т. П. Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості / Т. П. Гой, Р. А. Заторський // Буковинський математичний журнал. — 2013. — Т. 1. — № 1–2. — С. 28–33.

   Goy T. P. New functions defined by rising factorials, and its properties / T. P. Goy, R. A. Zatorsky // Bukovyna Math. J., 2013, Vol.1, No. 1–2, pp. 28–33.

2. Гой Т. П. Про нові функції, породжені зростаючими факторіальними степенями, та їх властивості / Т. П. Гой, Р. А. Заторський // Матеріали Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. "Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки" (Харків, 10-25 трав. 2013 р.). — Харків : Екограф, 2013. — С. 103–106.

   Goy T. P. On new functions defined by rising factorials, and its properties / T. P. Goy, R. A. Zatorsky // Proceedings of the Internet Conference "Mathematical modeling applied problems in mathematics, physics, mechanics", May 10–25, 2013, Kharkiv, Ukraine. — Kharkiv : Ekograph, 2013. — pp. 103–106.

3. Goy T. P., Zatorsky R. A. New integral functions generated by rising factorial powers. Carpathian Mathematical Publications, 2013, Vol.5, No. 2, pp. 217-224.

4. Грэхем Р. Конкретная математика. Основания математики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. — М. : БИНОМ, Лаборатория знаний. — 2009. — 703 с.

   Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. Concrete Mathematics: a Foundation for Computer Science. — Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

5. Jordan C. Calculus of Finite Differences. — New York : Chelsea Publishing, 1950.

6. Заторський Р. А. Числення трикутних матриць та його застосування / Р. А. Заторський. — Івано-Франківськ : Сімик, 2010. — 508 с.

   Zatorsky R.A. Calculus of Triangular Matrices and Its Applications. Ivano-Frankivsk: Simyk, 2010. (in Ukrainian).

7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М. : Наука. — 1979. — 832 с.

   Abramowitz M., Stegun I.A. (eds). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — New York : Dover Publications, 1972.

8. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Том 3. Специальные функции. Дополнительные главы / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. — М. : ФИЗМАТЛИТ. — 2003. — 688 с.

   Prudnikov A. P., Brichkov Y. A., Marichev O. I. Integrals and Series. Volume 3: More Special Functions. — CRC Press, 1990.

Статья поступила в редакцию 19.02.2014